ELEMENTE DE ALGEBRĂ SUPERIOARA

clasa a XI-a

I. MATRICE. Definitie. Egalitate.

Matricea de tipul (m,n) se prezinta sub forma unui tabel dreptunghiular cu m linii si n coloane.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Numerele $a_{ij}\in C$ se numesc *elementele matricei*.

- Matricea de tipul (m,1) se numeste *matrice linie*, matricea de tipul (1,n) se numeste *matrice coloana*.
- Daca m=n matricea se *numeste patratica*.
- Matricile $A,B\in M_{m,n}(C)$ sunt *egale* daca $a_{ij}=b_{ij}, \forall i\in\{1,2,...,m\},\ j\in\{1,2,...,n\}$
- Daca $A\in M_{nn}(C)$, sistemul ordonat de numere $(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$ formeaza *diagonala principala* a matricei, iar sistemul $(a_{1n},a_{2,n-1},...,a_{n1})$ formeaza *diagonala secundara* a matricei.
- Daca $A\in M_{nn}(C)$, se noteaza cu $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ *urma* matricei
- Matricea $A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se numeste *matricea transpusa* a matricei A

II. OPERATII CU MATRICI

1. Adunarea: Daca $A,B\in M_{mn}(C), A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, atunci matricea $C=A+B, C=(a_{ij}+b_{ij})$ se numeste *suma matricilor* A si B. Adunarea matricilor este asociativa, comutativa, are element neutru matricea nula $O_{mn}=(0_{ij})$, matricea $-A=(-a_{ij})$ se numeste opusa matricei A.
2. Inmultirea matricei cu un numar: Daca $\alpha\in C, A\in M_{ij}(C)$, atunci matricea $\alpha A=(\alpha a_{ij})$ se numeste produsul matricei A cu numarul ∝.
3. Inmultirea matricilor: Daca $A\in M_{mn}(C), A=(a_{ij}), B\in M_{np}(C), B=(b_{jk})$, atunci matricea $C=(c_{ik}), C\in M_{mp}(C)$ unde $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk}, i\in\{1,2,...,m\}, k\in\{1,2,...,p\}$. Imnultirea matricilor nu este comutativa. Elementul neutru a inmultirii matricilor patratice (matricea unitate) este matricea care are diagonala principala formata din cifra 1 si celelalte elemente 0; se noteaza I_n

Exercitii:

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Precizati: a. diagonala principala; b. diagonala secundara; c. Tr(A); d. A^t
2. Fie matricea $A\in_3(R), A=\begin{pmatrix} x^2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4x \end{pmatrix}$. Rezolvati ecuatia Tr(A)=0

3. Determinati numerele reale x,y,z,t daca $\begin{pmatrix} x^2 & y^2 & 3+t^2 \\ y+2 & z+2 & x+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Se dau matricile $A(x), B(x) \in M_3(C), A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x+1 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 2 & -1 & x-1 \end{pmatrix}$.

a. aratati ca $A(-1) = I_3$; b. Determinati valoarea numarului real X pentru care suma tuturor elementelor matricei B(x) este nula; c. Rezolvati ecuatia $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33}$.

5. Calculati matricile A+B; A-B; 2A+3B; 5A-2B; A·B; B·A in cazurile:

$a.\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};\quad b.\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

6. Rezolvati ecuatia matriceala $5X = 3X - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

7. Se considera matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.Calculati A^2, A^3 si aratati ca are loc egalitatea $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$.

8. In multimea $M_2(R)$ se considera matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}, a \in R.$

a. Sa se arate ca $X(a) \cdot X(b) = X(ab+a+b), \forall a,b \in R;$ b. Sa se determine $(X(1))^2$;

9. Se considera matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix} \in M_2(R).$

a. Calculati $A(1) + A(2) + A(3)$; b. Determinati $x \in R$ astfel incit $A(x) = I_2$; c. Calculati $A(0) \cdot A(2) \cdot A(3).$

10. Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in R \right\}.$

a. Aratati ca $I_2 \in M$; b. Daca $A(1) \cdot A(x) = A(3)$ sa se determine x; c. Sa se determine $x \in R$ astfel incit $A^2(x) = A(4).$

11. In multimea $M_2(C)$ se considera matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ precum si multimea $G = \{X \in M_2(C) \mid AX = XA\}.$

a. Sa se verifice ca $I_2 \in G$ si $A \in G$; b. Sa se arate ca $XA^2 = A^2 X, \forall X \in G$; c. Sa se gaseasca o matrice $B \in M_2(C)$ cu proprietatea ca $AB \neq BA.$

12. In multimea $M_2(R)$ se considera submultimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1, a, b \in R \right\}.$

a. Sa se verifice ca $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$; b. Sa se arate ca daca $A, B \in G$ atunci $AB \in G$; c. Sa se gaseasca o matrice $A \in G$ cu $b \neq 0$.