IV. MATRICEA INVERSA. ECUATII MATRICEALE

Matricea $A \in M_n(C)$ se numeste *inversabila* daca exista matricea $B \in M_n(C)$ astfel incit $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (se noteaza A^{-1}).

Matricea $A \in M_n(C)$ este inversabila daca si numai daca $\det(A) \neq 0$.

Calculul matricei inverse: Are loc egalitatea $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, unde A^* se numeste *matricea adjuncta* a matricei A. Elementele matricei adjunct sunt complementii algebrici ai *matricei transpuse* ${}^tA$. Complementul algebric δ_{ij} al elementului a_{ij} este dat de relatia $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, unde Δ_{ij} este minorul elementului δ_{ij} (determinantul obtinut prin suprimarea in matricea ${}^tA$ a liniei *i* si a coloanei *j*).

Daca matricile $A, B \in M_n(C)$ sunt inversabile, atunci au loc relatiile: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Daca A este matrice inversabila, atunci:

- Solutia ecuatiei $AX = B$ este $X = A^{-1}B$
- Solutia ecuatiei $XA = B$ este $X = BA^{-1}$

Exercitii:

1. Determinati inversele matricilor (daca exista) : $a.\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};\ \ b.\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ \ c.\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. Determinati parametrul real *m* astfel incit urmatoarele matrici sa fie inversabile: $A = \begin{pmatrix} m-2 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 & m+2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ m & 2 & -4 \end{pmatrix}$

3. Se considera matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix};\ B = I_3 + A;\ C = I_3 + aA.$ Se cere: a. Sa se calculeze A^2. b. Sa se determine $a \in R$ stiind ca matricea *B* este inversa matricei *C*.

4. Se considera matricea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \in M_2(R)$. Sa se arate ca pentru orice $x, y \in R^*$ matricea *A* este inversabila.

5. Sa se rezolve ecuatiile matriceale: $a.\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};\ \ b.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ c.\ X \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

6. Sa se rezolve ecuatiile matriceale: $a.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix};\ b.\ X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. Sa se rezolve ecuatiile matriceale $a.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\ b.\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$