ANALIZA MATEMATICA

I Dreapta incheiata

Def. $\overline{R}=[-\infty,+\infty]$ se numeste dreapta incheiata.
Operatii cu simbolul ∞:(la inmultire si impartire se aplica regula semnelor)

$\infty+\infty=\infty$; $a\cdot\infty=\infty, a\neq 0$; $\infty\cdot\infty=\infty$; $a^{\infty}=\infty, a\neq 1, a\neq 0$; $\infty^{a}=\infty, a\neq 0$; $\frac{a}{\infty}=0$, $\frac{\infty}{a}=\infty$, $\frac{a}{0}=\infty$

Operatii care nu se pot efectua (nedeterminari) prin calcul direct:

$\infty-\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; 1^{∞}; ∞^{0}

II Funcții continue

1. Limita unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți; interpretare grafică

Def. Fie functia $f:D\to R$.Spunem ca $l\in\overline{R}$ este limita functiei *f* in punctul x_0 daca pentru orice vecinatate V a lui *l*, exista o vecinatate U a lui x_0, astfel incit pentru orice $x\in D\cap(U\setminus\{x_0\})$ sa rezulte $f(x)\in V$.

2. Limite laterale

Def. Fie $x\in D; D_1=D\cap(-\infty,x_0), D_2=D\cap(x_0+\infty)$. Spunem ca functia *f* are *limita laterala la stinga* in punctul x_0 daca pentru orice sir $x_n\to x_0, x_n\in D_1$, sirul $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ este convergent catre aceeasi limita $l_s(x_0)$. Se va nota $l_s(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} = f(x_0-0)$

Def. Fie $x\notin D; D_1=D\cap(-\infty,x_0), D_2=D\cap(x_0+\infty)$. Spunem ca functia f *este continua* in punctul x_0 daca $l_s(x_0)=l_d(x_0)=f(x_0)$

Exercitii:

1. Sa se calculeze urmatoarele limite de functii:

$a.\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2}{x+1}$; $b.\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+1}{x+2}$; $c.\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}$; $d.\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-1}$; $e.\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-1}$;

2. Sa se studieze continuitatea urmatoarelor functii:

$a.\ f:[-1,1]\to[0,1],\ f(x)=\begin{cases}1+x, daca\ x\in[-1,0]\\ 1-x^2, daca\ x\in(0,1]\end{cases}$; $b.\ f:[0,3]\to[-1,2],\ f(x)=\begin{cases}2x, daca\ x\in[0,1)\\ 2-x, daca\ x\in[1,3]\end{cases}$;

$c.\ f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}x^3, daca\ x\in(-\infty,0]\\ x, daca\ x\in(0,2]\\ 18-x^4, daca\ x\in(2,+\infty)\end{cases}$; $d.\ f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}e^{x+1}, daca\ x\leq -1\\ 2+x, daca\ x>-1\end{cases}$;

3. Sa se determine parametrul real a pentru care functiile sunt continue:

$a.\ f:[0,2)\to R,\ f(x)=\begin{cases} x^2, daca\ x\in[0,1) \\ a, daca\ \ x=1 \\ 2-x, daca\ x\in(1,2) \end{cases}$; $b.\ f:[0,2]\to R,\ f(x)=\begin{cases} 1+x, daca\ x\in[0,1] \\ 3ax+3, daca\ x\in(1,2] \end{cases}$

$c.\ f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} e^x, daca\ x<0 \\ a+x, daca\ x\geq 0 \end{cases}$; $d.\ f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} e^x-1, daca\ x<0 \\ x^2+x+a, daca\ x\geq 0 \end{cases}$

4. Sa se studieze continuitatea functiei $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} x^2-x,\ x\geq 1 \\ -x^2+x, x<1 \end{cases}$ in punctul x=1.

5. Sa se studieze continuitatea functiei $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} x+2,\ x<0 \\ e^x+1,\ x\geq 0 \end{cases}$ in punctul x=0.

6. Sa se studieze continuitatea functiei $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x},\ x\geq 0 \\ e^x, x<0 \end{cases}$ in punctul x=0.

7. Sa se studieze continuitatea functiei $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} \frac{1}{e}e^x-1,\ x\leq 1 \\ \ln x, x>1 \end{cases}$ in punctul x=1.

8. Determinați parametrul real a pentru care următoarele funcții sunt continue

$a.\ f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} 2ax+1,\ x\leq 1 \\ ax^2+3ax,\ x>1 \end{cases}$, $b.\ f:R\to R, f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(x^2-9)}{x+3}, x\leq -3 \\ ax+2, \qquad x>-3 \end{cases}$

9. Sa se determine valoarea parametrului real m pentru care functia

$f:R\to R, f(x)=\begin{cases} 3mx+2,\ x\leq 3 \\ x^2+x+8, x>3 \end{cases}$ are limita in punctul $x_0=3$.

10. Sa se determine valorile parametrilor reali pentru care au loc egalitatile:

$a.\lim\limits_{x\to 3}[x+(a-2)]=4;\quad b.\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+ax\right)=2;\quad c.\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x+2b\right)=8$