III. DETERMINANTUL UNEI MATRICI PATRATICE DE ORDIN CEL MULT 3

Daca $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(C)$, atunci *determinantul* asociat matricei este: $\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} \in C$

Daca $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(C)$, atunci *determinantul* asociat matricei este – calculat dupa regula lui Sarrus - :

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} \in C$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Proprietati ale determinantilor:

1. Daca elementele unie linii (coloane) sunt nule, atunci determinantul este nul;
2. Daca doua linii (coloane) sunt identice sau proportionale, atunci determinantul este nul;
3. Daca o linie (coloana) este combinatie liniara de celelalte linii (coloane), atunci determinantul este nul;
4. Daca se permuta intre ele doua linii (coloane), atunci determinantul este opusul determinantului initial;
5. Daca se aduna la elementele unei linii (coloane) elementele altei linii (coloane), inmultite eventual cu acelasi numar, atunci valoarea determinantului nu se schimba;
6. Determinantul unei matrice patratice este egal cu determinantul matricei transpuse;
7. $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$.

IV. APLICATII ALE DETERMINANTULUI IN GEOMETRIE

1. Ecuatia dreptei in plan determinata de punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ se poate calcula prin determinantul: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

2. Conditia de coliniaritate a punctelor $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ este $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

3. Aria triunghiului *ABC* cu virfurile $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ este $S=\frac{1}{2}\cdot|\,d\,|$, unde $d=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

Exercitii:

1. Calculati determinantii: $a.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; $b.\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$; $c.\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2 \\ -2 & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; $d.\begin{vmatrix} 1+2i & 3-i \\ 3+i & 1-2i \end{vmatrix}$; $e.\begin{vmatrix} C_4^2 & A_3 \\ C_5^2 & C_4^3 \end{vmatrix}$

2. Calculati determinantii: $a.\begin{vmatrix}1&2&1\\3&6&0\\2&4&3\end{vmatrix}$; $b.\begin{vmatrix}-1&0&3\\3&-2&0\\2&1&-3\end{vmatrix}$; $c.\begin{vmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{3}\\0&-\sqrt{3}&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&-\sqrt{2}&0\end{vmatrix}$; $d.\begin{vmatrix}1+2i&0&0\\5i&5-i&0\\7i&1&7-i\end{vmatrix}$;

3. Calculati $\det(A+2B),\det(3A-2B),\det\left(A\cdot B\right),\det(B\cdot A),\det({}^{t}(B\cdot A))$ pentru matricile:

$a.\ A=\begin{pmatrix}3&-5\\0&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix};\ b.A=\begin{pmatrix}3+2i&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix};\ c.A=\begin{pmatrix}1&3&4\\4&1&0\\3&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}6&3&-5\\5&-4&3\\6&0&0\end{pmatrix}.$

4. Rezolvati ecuatiile: $a.\begin{vmatrix}4x&-2x\\3&4\end{vmatrix}=55;\ b.\begin{vmatrix}3-x&4+x\\4-x&3+x\end{vmatrix}=0;\ c.\begin{vmatrix}5^2&5^{x+1}\\5^{2x^2}&5^{-x+1}\end{vmatrix}=0;\ d.\begin{vmatrix}C_{3+x}^{5}&C_{2x}^{4}\\C_x^2&C_{6-x}^{2}\end{vmatrix}=-27;$

5. Rezolvati ecuatiile: $a.\begin{vmatrix}1&1&1\\x&-1&3x\\2x&4x&1\end{vmatrix}=0;\quad b.\begin{vmatrix}1&0&0\\2&x&0\\3&x&x^3\end{vmatrix}=1;\ c.\begin{vmatrix}x&2&2\\2&x&2\\2&2&x\end{vmatrix}=0;\ d.\begin{vmatrix}1&2&3\\2&x+1&2x+1\\3&2x+1&3x+1\end{vmatrix}=0.$

6. Știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3-5x^2+3x-1=0$, calculați determinanții:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}x_1&1&1\\1&x_2&1\\1&1&x_3\end{vmatrix}.\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_3&x_1\\x_3&x_1&x_2\end{vmatrix},\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}x_1^2&x_2&x_3\\x_2&x_3^2&x_1\\x_3&x_1&x_2^2\end{vmatrix}$$

7. Determinati ecuatia dreptei care trece prin punctele $a.A\left(-2,1\right),B\left(3,-4\right);\ \ b.A(1,-3),B(0,4);\ \ c.M(-1,-3),N(2,3)$.

8. Determinati valorile parametrilor a si b pentru care punctele $a.A\left(-2,3\right),B(3,2);\ b.M\left(1,1\right),N\left(-2,-5\right)$ se gasesc pe dreapta de ecuatie $x+ay+b=0$.

9. Determinati valorile parametrilor a si b pentru care punctele $A\left(6,2\right),B(2,6)$ se gasesc pe dreapta de ecuatie $ax+by=1$.

10. Determinati valorile parametrilor reali *m* si *n* pentru care punctele $A\left(1,2\right),B\left(2,1\right)$ formeaza dreapta $y=mx+n$.

11. Determinati valoarea parametrului real *m* pentru care punctele $A\left(m,5\right),B\left(2,4\right),C\left(3,-2\right)$ sunt coliniare.

12. Determinati valoarea parametrului real *m* pentru care punctele $A\left(2m,1-m\right),B\left(3,3\right),C\left(2,4\right)$ sunt coliniare.

13. Fie punctele $A(-2,3),B(2,-1),C(2,2)$. Calculati ariile triunghiurilor *AOB, AOC, BOC, ABC.*

14. Fie punctele $A(4,2),B(6,-2),C(4,7),D\left(11,1\right),M\left(6,2\right)$. Sa se calculeze ariile triunghiurilor *MAB*, *MBC*, *MCD* si *MDA*, precum si aria patrulaterului *ABCD.*

15. Calculati aria pentagonului cu virfurile $A(6,1),B(-3,-2),C(-4,4),D(1,5),E(2,-6)$.

16. Fie $A(1-x,1)$, $B(x,-1)$, $C(2-x,-1)$. Determinati valoarea parametrului real *x* pentru care aria triunghiului *ABC* este egala cu 20.

17. Fie $A(4,m)$, $B(-3,m)$, $C(2,3)$. Determinati valoarea parametrului real *m* pentru care aria triunghiului *ABC* este egala cu 7.